

分数阶阻尼裂纹转子的非线性动力学特性分析

薛士明¹, 曹军义¹, 林京¹, 陈阳泉²

(1. 西安交通大学智能仪器与监测诊断研究所, 710049, 西安;

2. 美国犹他州立大学自组织与智能系统中心, 84322, 美国洛根市)

摘要: 为了有效地提高转子系统特性的分析精度,使其能够准确地进行故障诊断,以 Jeffcott 转子模型为基础,建立了带有分数阶阻尼和横向呼吸裂纹故障的转子系统的动力学模型.采用 4 阶龙格库塔法和 10 阶连分式欧拉法对转子系统的动力学方程进行数值仿真计算,利用轴心轨迹图、Poincare 截面映射图和分岔图等,研究了阻尼的分数阶次、转速和裂纹深度对裂纹转子动态特性的影响,并通过实验对理论分析结果进行了验证.分析结果表明:在半临界转速附近,由于裂纹的存在,转子的轴心轨迹呈现明显的双环型(或称内 8 字形),因此响应中的 2 倍频分量占主导地位.随着分数次阻尼阶次的增加,转子系统依次经历混沌、准周期和周期运动,同时裂纹深度、不平衡量以及转速对转子系统的动态特性具有明显影响.

关键词: 分数阶阻尼;裂纹转子系统;非线性动力学

中图分类号: TH113 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2012)01-0076-05

Influences of Fractional Order Damping on Nonlinear Dynamics of Cracked Rotor

XUE Shiming¹, CAO Junyi¹, LIN Jing¹, CHEN Yangquan²

(1. Research Institute of Diagnostics and Cybernetics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. Center for Self-Organizing and Intelligent Systems, Utah State University, Logan Utah 84322, USA)

Abstract: Nonlinear dynamics of cracked rotor system with fractional order damping is investigated with a response-dependent breathing crack model. The fourth order Runge-Kutta method and tenth order continued fraction expansion Euler (CFE-Euler) method are introduced to simulate the proposed system equation of fractional order cracked rotors. The effects of derivative order of damping, rotating speed ratio, crack depth, orientation angle of imbalance relative to the crack direction and mass eccentricity on the system dynamics are demonstrated by bifurcation diagram, Poincare map and rotor trajectory diagram. The results show that the rotor system gets chaotic, quasi-periodic and periodic as the fractional order increases. It is also found that the imbalance eccentricity level, crack depth, rotational speed, fractional damping and crack angle all exert considerable influence on the nonlinear behaviors of cracked rotor system.

Keywords: fractional order damping; cracked rotor system; nonlinear dynamics

对裂纹转子系统进行非线性动态特性分析,对有效提高转子系统的特性和准确地进行故障诊断具有重要意义.因此,为了找出裂纹故障与众不同的振

动特性,众多学者对裂纹转子的非线性特性做了许多研究. Gasch^[1] 综述了带有横向裂纹转子的动态特性,提出转子固有频率的降低以及响应频谱中出

现的 2 倍频成分都可以作为横向裂纹诊断的主要指标. Darpe 等人^[2]分析了呼吸裂纹模型、开闭裂纹模型和开裂模型对转子系统的影响,结果表明呼吸裂纹模型更能模拟实际裂纹的呼吸特性.但是,这些研究大部分都是在整数阶微积分基础上进行的,具有分数阶阻尼的裂纹转子系统则很少有人研究.

近年来,分数阶微积分在信号和图像处理、机械、机电一体化、力学、控制理论、黏弹性和流变学,以及电气工程、电化学和生物工程等领域的应用,使分数阶微积分理论吸引了越来越多的人进行研究^[3-4]. Machado 等人^[5]的研究表明,即使系统的所有个体具有整数阶动态特性,系统的整体动力学特性也可能是分数阶的. Rossikhin 等人^[6]综述了最近 10 年分数阶微积分在机械动力学分析中的应用和发展趋势,研究表明分数阶微积分的机械系统动力学分析包括轴、梁、悬架组合系统等,而且已经逐渐成为工程动力学分析的主流方法之一. 本文研究了具有分数阶阻尼的裂纹转子系统的动力学特性,主要分析了分数阶阻尼阶次的变化对系统动态特性的影响,以及转速和裂纹深度等主要参数对系统振动特性的影响.

1 分数阶阻尼裂纹转子的非线性模型

以具有刚性支承的水平 Jeffcott 转子系统为基础,将刚性圆盘位于两支承中间,裂纹位于盘根部,且不计陀螺效应的影响. 假设转轴扭转刚性只考虑弯曲振动,忽略裂纹对转轴平行于裂纹方向刚度的影响. 在静止坐标系下,转子系统的振动方程可表示为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & k_{xy} \\ k_{yx} & k_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} me\omega^2 \cos(\omega t + \Phi_0) \\ me\omega^2 \sin(\omega t + \Phi_0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} mg \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$k_x = k_0 - f(\theta) \Delta k \cos^2(\theta + \varphi) \quad (2)$$

$$k_{xy} = k_{yx} = -f(\theta) \Delta k \sin(\theta + \varphi) \cos(\theta + \varphi) \quad (3)$$

$$k_y = k_0 - f(\theta) \Delta k \sin^2(\theta + \varphi) \quad (4)$$

式中: x, y 为直角坐标系; m 为刚性圆盘质量; c 为阻尼; e 为圆盘的质量偏心距; ω 为转子旋转角速度; t 为时间; Φ_0 为转轴自转的初始相位角; g 为重力加速度常数; k_x, k_y 分别为裂纹轴沿 x 和 y 方向的刚度; k_{xy}, k_{yx} 为 x, y 方向的耦合刚度; k_0 为无裂纹时转轴的刚度. 裂纹开关函数^[7]为

$$f(\theta) =$$

$$\begin{cases} 1 & (-\pi/2) + \alpha \leq \theta \leq (\pi/2) - \alpha \\ \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\theta - \pi/2 + \alpha}{2\alpha} \pi \right) \right) & (\pi/2) - \alpha \leq \theta \leq (\pi/2) + \alpha \\ 0 & (\pi/2) + \alpha \leq \theta \leq (3\pi/2) - \alpha \\ \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\theta - 3\pi/2 - \alpha}{2\alpha} \pi \right) \right) & (3\pi/2) - \alpha \leq \theta \leq (3\pi/2) + \alpha \end{cases} \quad (5)$$

$$\theta = \omega t + \Phi_0 + \beta - \varphi; \tan \varphi = y/x \quad (6)$$

式中: β 为转子不平衡量方向与裂纹方向的夹角; α 为 $1/2$ 裂纹夹角.

根据 Grunwald-Letnikov (简称 GL) 微积分定义, 连续可导函数的 r 阶 GL 微分为

$${}_a D_t^r f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-r} \sum_{j=0}^{t-a/h} (-1)^j \binom{r}{j} f(t - jh) \quad (7)$$

$$\binom{r}{j} = \frac{\Gamma(r+1)}{j! \Gamma(r-j+1)}$$

式中: r 为微积分的阶次; h 为步长; j 为二项式系数; $\Gamma(\cdot)$ 为欧拉伽马函数. 如果所有初始条件都为 0, 则分数阶微积分的拉氏变换可简化为

$$L\{{}_0 D_t^r f(t)\} = s^r F(s) \quad (8)$$

由式(8)可看出, 分数阶微积分的数值计算是求解分数阶微积分等式的关键, 采用欧拉算子对分数阶微积分算子进行直接离散化, 然后运用连分式展开变换, 得到离散后的结果为

$$\begin{aligned} Z\{D^r x(t)\} &= C_{FE} \left\{ \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^r \right\} X(z) \approx \\ &\left(\frac{1}{T} \right)^r \frac{P_p z^{-1}}{Q_q z^{-1}} X(z) \end{aligned} \quad (9)$$

式中: $C_{FE}\{\cdot\}$ 为连分数展开式变换; p, q 为近似值的阶次数; P_p, Q_q 为 p 次和 q 次多项式.

使用分数阶微积分得到的分数阶阻尼力为

$$F_d = c D^r x(t) \quad (10)$$

在裂纹转子动力学分析中, 当考虑分数阶阻尼时, 系统的振动方程变为

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + c D^r x + k_0 x - f \Delta k [\cos^2(\theta + \varphi) x + \\ \sin(\theta + \varphi) \cos(\theta + \varphi) y] &= mg + me\omega^2 \cos(\omega t + \Phi_0) \\ m\ddot{y} + c D^r y + k_0 y - f \Delta k [\sin^2(\theta + \varphi) y + \\ \sin(\theta + \varphi) \cos(\theta + \varphi) x] &= me\omega^2 \sin(\omega t + \Phi_0) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

为保证计算精度, 引入以下归一化参数

$$\delta_{st} = mg/k_0; \omega_c = (k_0/m)^{1/2}; X = x/\delta_{st};$$

$$Y = y/\delta_{st}; \bar{K} = \Delta k/k_0; \bar{e} = e/\delta_{st};$$

$$\tau = \omega t; \zeta = c/2(mk_0)^{1/2}; X' = dX/d\tau;$$

$$Y' = dY/d\tau; s = \omega/\omega_c$$

对式(11)进行归一化后得

$$\left. \begin{aligned} X'' + \frac{2\zeta}{s} D'X + \frac{1}{s^2} X - f \frac{\bar{K}}{s^2} [\cos^2(\theta + \varphi) X + \\ \sin(\theta + \varphi) \cos(\theta + \varphi) Y] &= \frac{1}{s^2} + \bar{e} \cos(\tau + \Phi_0) \\ Y'' + \frac{2\zeta}{s} D'Y + \frac{1}{s^2} Y - f \frac{\bar{K}}{s^2} [\sin^2(\theta + \varphi) Y + \\ \sin(\theta + \varphi) \cos(\theta + \varphi) X] &= \bar{e} \sin(\tau + \Phi_0) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

2 转子系统动力学特性研究

应用 Matlab-Simulink 对裂纹转子系统的非线性动力学特性进行了数值仿真分析,采用连分式展开、欧拉法和 IIR 滤波器模型对方程进行近似计算,应用四阶龙格库塔方法求解系统归一化振动方程. 设各参数的初值为: $\Phi_0 = 0, \alpha = \pi/6, \bar{e} = 0.1, \zeta = 0.01, X'_0 = 0, X_0 = 1, Y'_0 = 0, Y_0 = 0, \beta = 0, \bar{K} = 0.15$.

当转子系统的转速比 $s = 0.65$ 时,随着 r 的变化得到的系统响应分岔图如图 1 所示. 从图 1 中可以看出, r 对系统有明显的影响,当 r 较小时,系统运动为混沌运动. 图 2 为 $r = 0.28$ 时转子系统的轴心轨迹、Poincare 截面图和幅频图. 当 $0.3 < r < 0.9$ 时,系统响应为周期 2 运动,如图 3 所示,在 Poincare 截面上表现为 2 个孤立的点域,说明系统为周期 2 运动,在幅频图中可以看到有分数次倍频成分出现. 当 $r > 0.9$ 时,系统变为单周期运动,如图 4 所示.

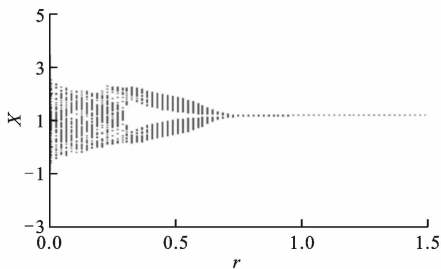


图 1 分数阶阻尼阶次的分岔图

转速是影响转子系统动态特性的主要因素,图 5 为 $\beta = 0, \bar{K} = 0.15, \bar{e} = 0.1, r = 0.5$ 时,不同 s 下裂纹转子动态响应的分岔图. 图 6 为 $s = 0.3$ 时,转子响应的轴心轨迹图和幅频图. 从图 6 中可以看出,裂纹转子响应幅频中出现了 1 倍频、2 倍频、3 倍频等

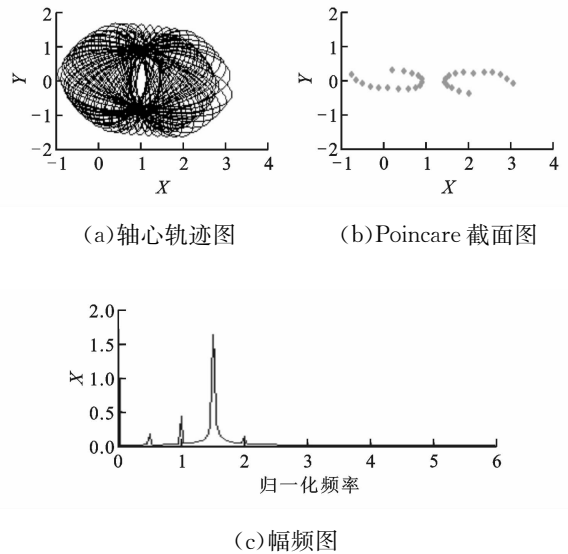


图 2 系统的轴心轨迹图、Poincare 截面图和幅频图 ($r = 0.28$)

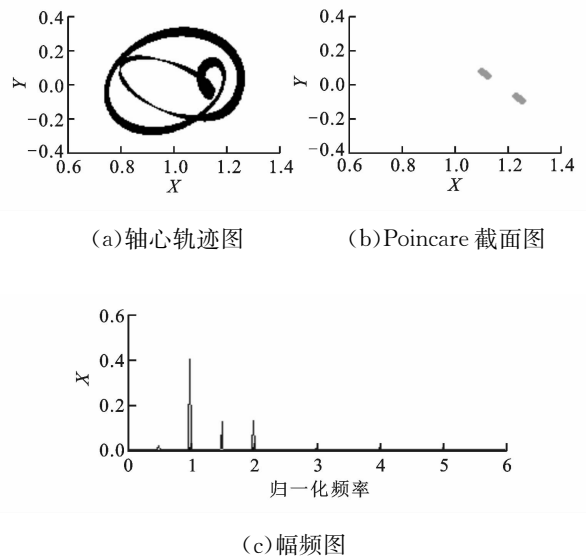


图 3 系统的轴心轨迹图、Poincare 截面图和幅频图 ($r = 0.7$)

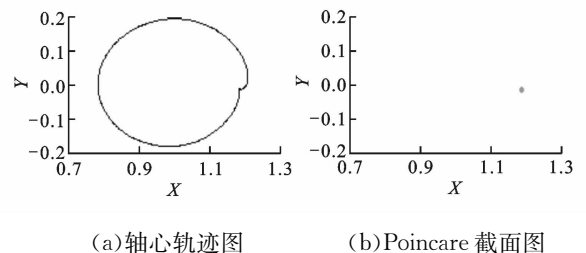


图 4 系统的轴心轨迹图和 Poincare 截面图 ($r = 1.1$)

高倍频分量. 图 7 为 $s = 0.51$ 时,响应的轴心轨迹图和幅频图,此时转子的轴心轨迹是明显的双圆(或内 8 字)形,并且响应中的 2 倍频成分占主导地位. 从

图 8 中可知,转子运动的轴心轨迹为一椭圆,并且在幅频图中 2 倍频及其以后的各倍频谐波分量极小,此时转子为单周期运动。

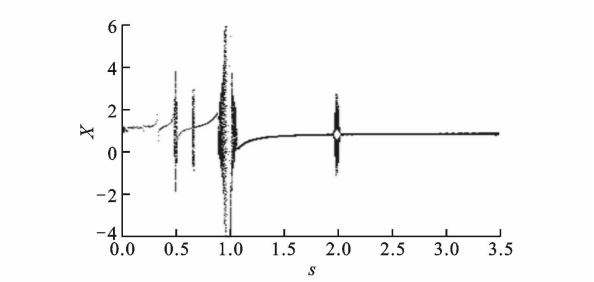


图 5 X 对应于转速比的分岔图

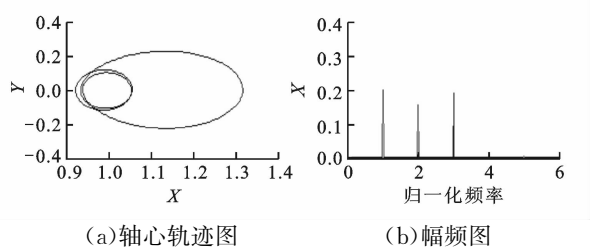


图 6 系统的轴心轨迹图和幅频图($s=0.3$)

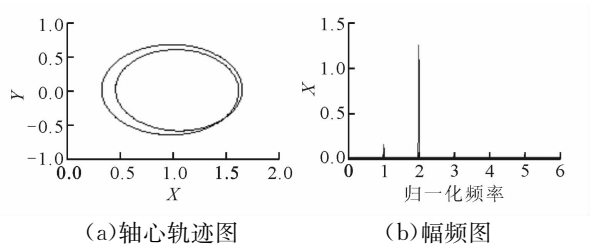


图 7 系统的轴心轨迹图和幅频图($s=0.51$)

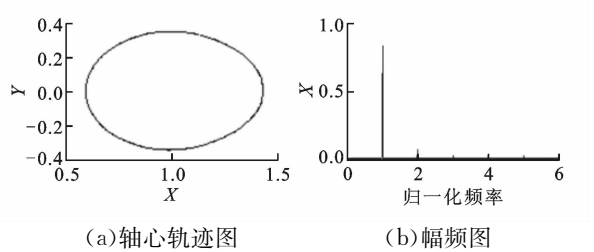


图 8 系统的轴心轨迹图和幅频图($s=0.8$)

图 9 为保持 $\beta=0$ 、 $\bar{e}=0.1$ 、 $r=0.5$ 不变, $\bar{K}=0.1, 0.2, 0.3$ 时,裂纹转子响应的轴心轨迹图。由图 9 可以看出,随着 $\bar{K}$ 的增加,转子的振动变剧烈,系统越来越不容易稳定。采用本特利公司的 RK4 型模拟转子实验台,对带有横向裂纹的 Jeffcott 转子系统的非线性动力特性进行了实验验证。裂纹深度约为轴直径的 30%,数采系统为 NI 公司的 PXI-1033 机箱加 PXI-4472B 高精度动态信号采集模块,振动

传感器为本特利的电涡流传感器。图 10 为裂纹转子的转速在 1 013 r/min($s=0.52$)时的响应幅频图,以及合成轴心轨迹图,可以很明显地看出,在半临界转速附近,转子系统的轴心轨迹呈现明显的双环形(或内 8 字形),并且在幅频图中 2 倍频分量占主导成分,这与理论数值分析的结果相吻合。

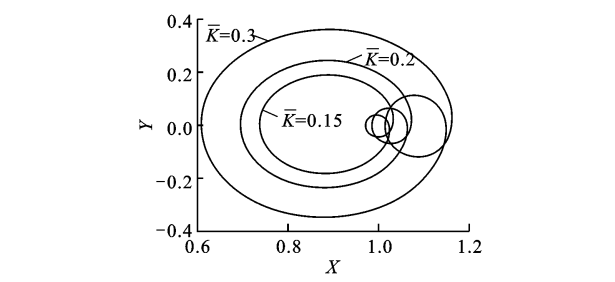


图 9 裂纹转子刚度变化对系统响应的影响

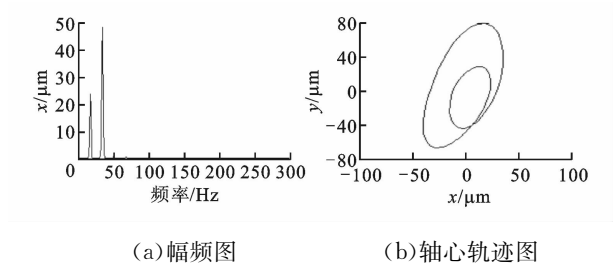


图 10 裂纹转子在半临界转速附近的幅频及轴心轨迹图

3 结 论

本文对带有分数阶阻尼的裂纹转子的非线性动态特性进行了研究,运用分数阶微积分建立了系统的阻尼模型,采用 4 阶龙格库塔法和 10 阶连分式欧拉法对系统振动微分方程进行了数值仿真。利用轴心轨迹图、Poincare 截面映射图、分岔图和幅频图研究了裂纹转子阻尼的分数阶微积分阶次、转速和裂纹深度对系统动力学性能的影响。

研究结果表明:分数阶阻尼阶次对裂纹转子系统的响应有很大的影响,随着阶次的增大,转子振动依次经历混沌运动、倍周期运动和单周期运动;转子裂纹的呼吸效应会使得转子响应中出现 1 倍频、2 倍频、3 倍频等高倍频分量,同时也会导致响应中出现分数次倍频分量。在 1/2 转子第 1 临界转速附近,响应中的 2 倍频分量的增大,以及转子呈现出的内 8 字形轴心轨迹,都可以作为裂纹诊断的依据。裂纹深度也是影响转子动态特性的关键因素之一,随着裂纹深度的增加,转子的振动会变的越来越剧烈。因此,当转轴中出现裂纹后,应当密切监测裂纹的变化,并采取一些措施来确保转子的安全运转。

参考文献:

- [1] GASCH R. A survey of the dynamic behaviour of a simple rotating shaft with a transverse crack [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 160(2): 313-332.
- [2] DARPE A K, CHAWLA A, GUPTA K. Analysis of the response of a cracked Jeffcott rotor to axial excitation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 249(4): 29-45.
- [3] PADOVAN J, SAWICKI J T. Nonlinear vibrations of fractionally damped systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1998(16): 32-36.
- [4] CAO Junyi, MA C, XIE H, et al. Nonlinear dynamics of Duffing system with fractional order damping [J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2010, 5(4): 041012-041018.
- [5] TENREIRO M J A, SILVA M F. Some applications of fractional calculus in engineering [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010(2010): 639801-34.
- [6] ROSSIKHIN Y A, SHITIKOVA M V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2010, 63(1): 1-52.
- [7] 高建民, 朱晓梅. 转轴上裂纹开闭模型的研究 [J]. *应用力学学报*, 1992, 19(1): 108-112.
- GAO Jianmin, ZHU Xiaomei. Study on the model of the shaft crack opening and closing [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1992, 19(1): 108-112.

(编辑 管咏梅)